

9.1.10 Úlohy s faktoriály a kombinačními čísly

Př. 1: Porovnej čísla: $100!+101!$ a $99!+102!$

$$100!+101! = 99! \cdot 100 + 99! \cdot 100 \cdot 101 = 99! \cdot (100 + 100 \cdot 101)$$

$$99!+102! = 99! + 99! \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102 = 99! (1 + 100 \cdot 101 \cdot 102)$$

$$100 + 100 \cdot 101 = 10200$$

$$1 + 100 \cdot 101 \cdot 102 = 1030201$$

Př. 2: Spočítej s pomocí kalkulačky: $\binom{1500}{3}$.

$$\binom{1500}{3} = \frac{1500!}{1497! \cdot 3!} \text{ - tento tvar nemůžeme použít protože kalkulačka nespočítá } 1500! \Rightarrow$$

zkrátíme ve výrazu vše, co půjde. aby kalkulačka počítala s menším číslem:

$$\binom{1500}{3} = \frac{1500!}{1497! \cdot 3!} = \frac{1500 \cdot 1499 \cdot 1498 \cdot 1497!}{1497! \cdot 3!} = \frac{1500 \cdot 1499 \cdot 1498}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 561375500$$

Př. 3: Kolika nulami končí zápis čísla $80!$?

$$80! = 80 \cdot 79 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Celkový počet nul: $8 + 8 + 3 = 19$

Zápis čísla $80!$ končí na 19 nul.

Správnost předchozího výsledku si můžeme ověřit pomocí počítače, výpočtem faktoriálu:

$$80! = 7156945704626380229481153372318653216558465734236575257710944505822703925548014884266894486728081408000000000000000000$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $(n+1)! = 42(n-1)!$

podmínky: $n+1 \geq 0$, $n-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1$

$(n+1)n(n-1)! = 42(n-1)! \quad / : (n-1)! - (n-1)! \text{ je určitě kladné číslo} \Rightarrow \text{můžeme dělit}$

$$n^2 + n - 42 = 0$$

$$(n+7)(n-6) = 0 \quad K = \{6\}$$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $9n! + 3(n+1)! \geq (n+2)!$

podmínky: $n \geq 0$, $n+1 \geq 0$, $n+2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$

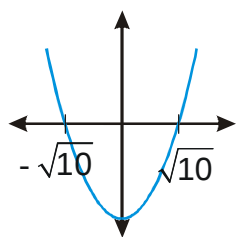
$$9n! + 3(n+1) \cdot n! \geq (n+2)(n+1) \cdot n!$$

$$3n + 12 \geq n^2 + 2n + n + 2$$

$$0 \geq n^2 - 10$$

$$0 \geq (n + \sqrt{10})(n - \sqrt{10}) \Rightarrow \text{kvadratická nerovnice v součinném tvaru}$$

před n je kladné číslo $\Rightarrow$ „d'olík“, průsečíky v bodech $-\sqrt{10}$ a $\sqrt{10}$



Hledáme části grafu pod osou $\Rightarrow$ řešení v reálných číslech $\langle -\sqrt{10}; \sqrt{10} \rangle$.

Řešíme nerovnici pouze v přirozených číslech $\Rightarrow K = \{1; 2; 3\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $\binom{x}{x-2} - \binom{x+1}{x} = 4$.

musí splňovat podmínky: $x \geq 0$, $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$$\binom{x}{x-2} - \binom{x+1}{x} = 4$$

nahradíme kombinační čísla faktoriály $\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} - \frac{(x+1)!}{(x+1-1)! \cdot 1!} = 4$

$$\frac{x(x-1)}{2} - (x+1) = 4$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0 \quad K = \{5\}$$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $\binom{9}{x+1} < 2 \binom{9}{x}$.

$$\frac{9!}{(9-[x+1])! \cdot (x+1)!} < 2 \frac{9!}{(9-x)! \cdot x!}$$

$$\frac{9!}{(8-x)! \cdot (x+1)!} < 2 \frac{9!}{(9-x)! \cdot x!}$$

podmínky: $8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$, $x \geq 0$, $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$(9-x)! \cdot x! < 2(8-x)! \cdot (x+1)!$ rozepíšeme faktoriály: $(9-x)! = (9-x) \cdot (8-x)!$

$$(9-x)(8-x)! \cdot x! < 2(8-x)! \cdot (x+1)x!$$

$$(9-x) < 2(x+1)$$

$\frac{7}{3} < x$ řešením mohou být podle podmínek pouze celá čísla v intervalu $\langle 0; 8 \rangle$

$$\Rightarrow K = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

Př. 8: Petáková:

strana 141/cvičení 5 d)

strana 141/cvičení 7 a)

strana 141/cvičení 9 a)

strana 142/cvičení 13 b)

strana 143/cvičení 25 c) e)

strana 143/cvičení 28 d)

strana 144/cvičení 30 a)